Міністерство освіти і науки України

Національний університет водного господарства та природокористування

02-05-54

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

для виконання самостійної роботи
з навчальної дисципліни «Теоретична механіка» (розділ «Кінематика»)
студентами спеціальностей: 274 «Автомобільний транспорт»,
133 «Галузеве машинобудування»

Рекомендованонауково- методичними комісіями зі спеціальностей: «Автомобільний транспорт», протокол № 9 від 10.05.2017 р, «Галузеве машинобудування» , протокол № 8 від 16.05.2017 р.

Рівне – 2017

Методичні вказівки для виконання самостійної роботи з дисципліни «Теоретична механіка» (розділ «Кінематика») студентами спеціальностей 274 «Автомобільний транспорт»,133 «Галузеве машинобудування» Серілко Л.С., Щурик В.О., Войтович Л.В.- Рівне: НУВГП, 2017.- 30 с.

Упорядники: Л.С.Серілко, к.т.н., доцент; В.О.Щурик, к.т.н., доцент; Л.В. Войтович, ст.викладач

Відповідальний за випуск: М.М.Козяр, д.п.н., професор, завідувач кафедри теоретичної механіки, інженерної графіки та машинознавства

ЗМІСТ

В С Т У П

Самостійна робота студентів над курсом теоретичної механіки є запорукою успішного його засвоєння та складання екзамену або заліку.

Теоретична механіка є однією з багатьох наук про природу, предмет дослідження цієї науки вічний та безмежний у своєму обсязі, на її основних законах базуються такі інженерні дисципліни як опір матеріалів, будівельна механіка, інженерні конструкції, гідравліка, теорія машин та механізмів тощо.

Ефективна експлуатація меліоративних та будівельних машин і механізмів, їх модернізація та створення різноманітних пристроїв неможливі без з н а н ь о с н о в к і н е м а т и к и, яка є складовою частиною теоретичної механіки. Без цих знань неможливе подальше вивчення курсу теоретичної механіки - динаміки.

Вивчення кожної теми доцільно проводити в такій послідовності: спочатку вивчити теоретичну частину курсу по конспекту та одному з рекомендованих підручників [1-4], пам'ятаючи, що головне - це зрозуміти, а не "завчити"; потім розібратися у розв'язуваннях прикладів в конспекті та посібнику [5], звернувши особливу увагу на методичні вказівки по їх розв'язанню; розв'язати самостійно кілька аналогічних задач з рекомендованих по збірнику [6] або [7].

Остаточний успіх в розв’язуванні більшості задач кінематики залежить від того, чи правильно студент показав напрями векторів швидкостей та прискорень окремих точок тіл, що рухаються. Тому з перших кроків вивчення кінематики необхідно звернути увагу на правила напрямлення відповідних векторів і докласти зусиль, щоб опанувати цими правилами і вільно користуватись ними.

Після вивчення кожної теми, якщо є необхідність, розв'язати відповідне завдання із самостійної роботи.

У випадку труднощів в розумінні якого-небудь питання необхідно звернутися на кафедру за к о н с у л ь т а ц і є ю: відповіді можна отримати лише на конкретні запитання як з теорії, так і по розв'язуванню задач.

Слід зазначити, що велику допомогу студентам в розв'язуванні задач нададуть навчальні посібники [5] та [6].

Дані методичні вказівки є по суті продовженням завдань для самостійної роботи 02-05-35 і тому написані у повній відповідності з ними. Обидва видання складені для надання допомоги студентам в організації самостійної роботи при вивченні розділу "кінематика" курсу теоретичної механіки.

Як відомо [2,3], кінематика вивчає рух тіла або точки незалежно від причин, які зумовлюють або змінюють його.

1. Кінематика точки

1.1. Перш ніж виконати завдання 1 [1], студент повинен поновити основні поняття (рух, простір, час, швидкість, прискорення тощо), з якими він знайомий з курсу фізики, по одному з рекомендованих підручників [2,3] .

Треба добре засвоїти, що таке швидкість $\vec{V}$ та прискорення $\vec{a}$ точки, як вони визначаються при трьох способах задавання руху точки за величиною і напрямком. Основні формули по цій темі зведені в табл. 1.1.

1.2. М е т о д и ч н і   в к а з і в к и. Для розв'язання завдання 1 [1] необхідно з курсу математики повторити криві другого порядку, визначення похідних від складних функцій, побудову графіків функцій. В деяких варіантах при визначенні траєкторії або при наступних розрахунках для їх спрощення слід враховувати відомі з математики співвідношення: $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$; $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

Якщо при користуванні формулою (1.17) виникають труднощі, то краще скористатися формулою (1.20). Якщо траєкторія руху точки замкнена (коло, еліпс), то для визначення напряму руху точки по ній необхідно додатково визначити положення точки М в момент часу між $t = t_1$ та $t = t_2$.

ПРИКЛАД 1.1. Знайти рівняння траєкторії точки, якщо її рівняння руху мають вигляд (x, y - в метрах, t - в секундах):

а) $x = 2t$, $\quad y = -2/t$;

б) $x = 2\sin^2(\pi t/2)$, $\quad y = 3\cos^2(\pi t/2)$;

в) $x = 3\sin(\pi t)$, $\quad y = 4\cos(2\pi t)$;

Вказати напрям руху точки по траєкторії.

Розв'язання. Щоб визначити рівняння траєкторії точки треба з двох рівнянь руху виключити параметр t.

а) В цьому випадку перемножимо задані рівняння $x = 2t$ та $y = -2/t$ і маємо $xy = -4$. Отримали рівняння гіперболи, графік цієї функції зображено на рис. 1.1, а. Визначимо яка вітка гіперболи є траєкторією точки. Відомо, що час t від'ємним не буває, тобто $t \ge 0$. Аналіз рівнянь руху точки ($0 \le t < \infty$) дає, що $0 \le x \le \infty$ і $-\infty \le y \le 0$, тобто траєкторією руху точки є нижня вітка гіперболи (рис. 1.1, а). При $t = 0$, $x = 0$, $y \to \infty$, тому напрям руху точки очевидний і вказаний на рис. 1.1, а.

Кінематичні характеристики руху точки *Таблиця 1.1*

Закон або рівняння руху точки	Швидкість V (м/с)	Прискорення a (м/с^2)
Векторний спосіб		
$\vec{r} = \vec{r}(t)$ (1.1)	$\vec{V} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ (1.2)	$\vec{a} = \dfrac{d\vec{V}}{dt}$ (1.3)
Координатний спосіб		
$\left.\begin{aligned} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t), \\ z &= f_3(t) \end{aligned}\right\}$ (1.4)	Величина $\lvert V\rvert = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$, (1.5) $V_x = \dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$, (1.6) де $(x \to y \to z \to x)$ напрям $\left.\begin{aligned} \cos(\vec{V},\vec{i}) &= V_x/\lvert V\rvert, \\ \cos(\vec{V},\vec{j}) &= V_y/\lvert V\rvert, \\ \cos(\vec{V},\vec{k}) &= V_z/\lvert V\rvert; \end{aligned}\right\}$ (1.7)	Величина $\lvert a\rvert = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$, (1.8) $a_x = \dfrac{dV_x}{dt} = \ddot{x}$ (1.9) де $(x \to y \to z \to x)$ напрям $\left.\begin{aligned} \cos(\vec{a},\vec{i}) &= a_x/\lvert a\rvert, \\ \cos(\vec{a},\vec{j}) &= a_y/\lvert a\rvert, \\ \cos(\vec{a},\vec{k}) &= a_z/\lvert a\rvert \end{aligned}\right\}$ (1.10)
Натуральний спосіб		
$S = S(t)$ (1.11)	$\vec{V} = V \cdot \vec{\tau}$, (1.12) де $V = \dfrac{dS}{dt}$ (1.13)	$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$ (1.14) або $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$, (1.15) де $a_n = V^2 / \rho$, (1.16) $a_\tau = dV / dt$. (1.17)
Зв'язок між різними способами задавання руху точки:		

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \tag{1.18}$$

$$S = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt, \tag{1.19}$$

$$a_\tau = (a_x V_x + a_y V_y + a_z V_z)/V, \tag{1.20}$$

$$a_n = \frac{1}{V}\sqrt{(V_x a_y - V_y a_x)^2 + (V_y a_z - V_z a_y)^2 + (V_z a_x - V_x a_z)^2}, \tag{1.21}$$

де V обчислюється за формулою (1.5).

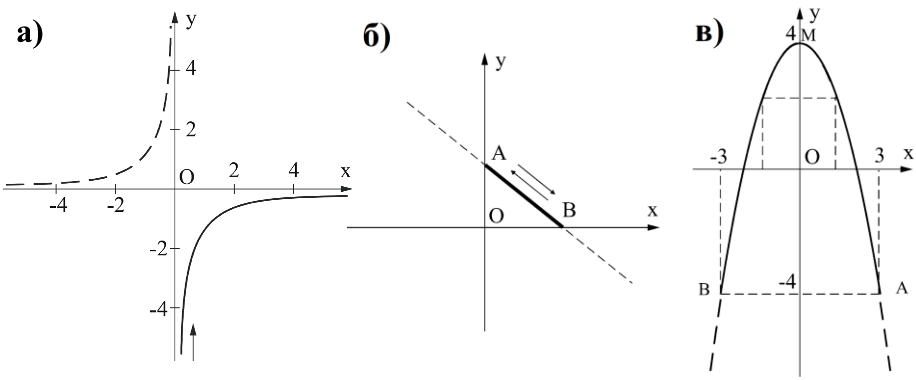


Рис. 1.1

б) Аналізуючи вихідні рівняння $x = 2\sin^2(\pi t/2)$ і $y = 3\cos^2(\pi t/2)$, бачимо, що в обох рівняннях аргумент у тригонометричних функцій однаковий і тому $x/2 + y/3 = 1$, бо $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$. Отримали рівняння прямої лінії, яка проведена через точки *A*(0; 3) та *B*(2; 0) - рис. 1.1, б. Визначимо чи вся пряма є траєкторією руху точки, пам'ятаючи що $t \geq 0$ і $0 \leq \cos^2\alpha \leq 1$, $0 \leq \sin^2\alpha \leq 1$. З рівнянь руху точки маємо $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 3$, тобто траєкторією руху точки є відрізок прямої від точки *A*(0; 3) до *B*(2; 0) і навпаки.

в) У цьому випадку $x = 3\sin(\pi t)$, $y = 4\cos(2\pi t)$, тому використаємо відоме співвідношення $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$. Маємо $y = 4\cos(2\pi t) = 4 - 8\sin^2(\pi t)$, але $\sin(\pi t) = x/3$, тому $y = 4 - 8x^2/9$, а це є рівняння параболи з вершиною (0; 4), графік якої зображено на рис. 1.1, в. Відомо, що $|\sin \pi t| \leq 1$, $|\cos 2\pi t| \leq 1$, тобто, $|x| \leq 3$, $|y| \leq 4$ і траєкторією руху точки є частина параболи, для якої $-3 \leq x \leq 3$, $-4 \leq y \leq 4$ (рис. 1.1, в – суцільна лінія).

При $t = 0$ $x_0 = 0$, $y_0 = 4$ і точка знаходиться в положенні *M* (рис. 1.1, в); при $t_1 = 0{,}5$ с $x_1 = 3$, $y_1 = -4$, а це координати точки *A* на рис. 1.1, в. При $t_2 = 1$ с $x_2 = 0$, $y_2 = 4$, тобто точка повернулася в положення *M* і далі рухається до точки *B*(-3; -4), що відповідає $t_3 = 1{,}5$ с. Відбувається коливальний процес навколо положення *M*.

ПРИКЛАД 1.2. По заданих рівняннях руху точки:

$$x = 3\cos^2(\pi t/6) \qquad \text{і} \qquad y = 1 + 2\sin(\pi t/3)\,, \qquad (1.22)$$

де x, y в метрах, t в секундах, знайти рівняння траєкторії точки та накреслити її. Для моменту часу $t_1 = 1$ с визначити:

- положення точки;
- напрям руху уздовж траєкторії;
- величини і напрямки швидкості, нормального, дотичного та повного прискорення; зобразити їх на рисунку;
- радіус кривизни траєкторії точки.

Розв'язання. Для знаходження рівняння траєкторії, по якій рухається точка, виключимо параметр t з рівнянь (1.22) .

Через те, що $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, тому $\cos^2\alpha = (1+\cos 2\alpha)/2$ і маємо $x = 3(1+\cos \pi t/3)/2$, звідки $\cos(\pi t/3) = (2x-3)/3$; крім того, $\sin(\pi t/3) = (y-1)/2$. Враховуючи, що $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, отримаємо:

$$\left(\frac{x-1{,}5}{1{,}5}\right)^2 + \left(\frac{y-1}{2}\right)^2 = 1\,.$$

Це є рівняння еліпса з центром $x = 1{,}5$, $y = 1$ і півосями $x = \pm 1{,}5$, $y = \pm 2$, який зображено на рис. 1.2. Враховуючи, що $0 \le t \le \infty$ і $|\sin(\pi t/3)| \le 1$, $|\cos(\pi t/3)| \le 1$, маємо $0 \le x \le 3$, $-1 \le y \le 3$, тобто, весь еліпс є траєкторією точки. Рух відбувається проти годинникової стрілки, в чому легко переконатися, послідовно підставляючи у задані рівняння $t_0 = 0$ $(x_0 = 3, y_0 = 1)$, $t_1 = 1$ c $(x_1 = 2{,}25; y_1 = 2{,}732)$ і $t_2 = 3c$ $(x_2 = 0, y_2 = 1)$. Зображаєм точку М (2,25; 2,732) на рис. 1.2.

Величину і напрям швидкості V визначаємо за формулами (1.5…1.7), враховуючи, що рух відбувається в площині XOY:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}\,, \qquad \cos(\vec{V}\,\hat{,}\,x) = V_x/V\,, \qquad \cos(\vec{V}\,\hat{,}\,y) = V_y/V\,,$$

де $V_x = \dot{x} = dx/dt = d\,(3\cos^2(\pi t/6))/d\,t = -0{,}5\,\pi\sin(\pi t/3)$;

$$V_y = \dot{y} = dy/dt = d\,(1+\sin(\pi t/3))/d\,t = \pi\cos(\pi t/3)/3\,.$$

При t = 1 с маємо $\boldsymbol{V}_x$ = -0,433π м/с, $\boldsymbol{V}_y$ = 0,167π м/с, $V = \pi\sqrt{(-0{,}433)^2 + (0{,}167)^2} = 0{,}464\pi$ (м/с), $\cos(V\,\hat{,}\,x) = -0{,}929$, $\cos(V\,\hat{,}\,y) = 0{,}360$, що дорівнює 158,9° та 68,9° відповідно.

Аналогічно за формулами (1.8…1.10) визначаємо величину і напрям повного прискорення точки. Маємо:

$$a_x = \ddot{x} = dV_x/dt = -0{,}167\,\pi^2 \cos(\pi t/3),$$

$$a_y = \ddot{y} = dV_y/dt = -0{,}111\,\pi^2 \sin(\pi t/3).$$

При $t = t_1 = 1$ с:

$a_x = -0{,}083\,\pi^2$; $a_y = -0{,}096\,\pi^2$;

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 0{,}127\,\pi^2 \text{ (м/с}^2\text{)};$$

$$\cos(\vec{a} \,\hat{,}\, x) = a_x/a = -0{,}655 \text{ або } 130{,}9°;$$

$$\cos(\vec{a} \,\hat{,}\, y) = a_y/a = -0{,}756 \text{ або } 139{,}1°.$$

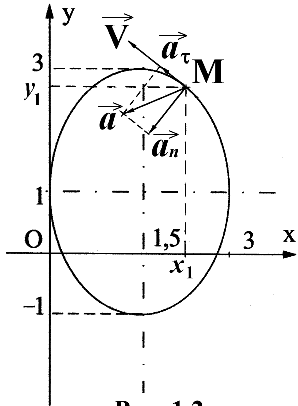


Рис. 1.2

Визначимо дотичне (тангенціальне) прискорення точки М за формулою (1.20) при t = 1 с:

$$a_\tau = \frac{a_x V_x + a_y V_y}{V} = \frac{(-0{,}083\pi^2)(-0{,}433\pi) + (-0{,}096\pi^2)(0{,}167\pi)}{0{,}464\pi} = 0{,}043\pi^2 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Обчислимо нормальне (доцентрове) прискорення точки М, при t = 1 с, використавши формулу (1.15):

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \pi^2\sqrt{(0{,}127)^2 - (0{,}043)^2} = 0{,}1195\pi^2 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Знаходимо радіус кривизни за формулою (1.16):

$$\rho = V^2/a_n = (0{,}464\pi)^2/0{,}1195\pi^2 = 1{,}80 \text{ (м)}.$$

Відповідь: при t = 1 с x_1 = 2,25 м, y_1 = 2,732 м, V = 0,464π м/с, a = 0,127 π^2 м/с², a_τ = 0,043 π^2 м/с², a_n = 0,1195 π^2 м/с², ρ = 1,80 м; всі вектори зображені на рис. 1.2.

2. Найпростіші рухи твердого тіла

У кінематиці будемо розглядати всі тверді тіла як абсолютно тверді. *Абсолютно твердим тілом* називається таке матеріальне тіло, відстань між двома довільними точками якого весь час залишається незмінною.

В задачах кінематики твердого тіла визначають кінематичні характеристики тіла в цілому і окремих його точок.

До найпростіших рухів твердого тіла відносяться поступальний рух та обертальний рух навколо нерухомої осі, на які, як відомо [2, 3], розкладається будь-який рух твердого тіла.

2.1. *Поступальним називається такий рух твердого тіла, під час якого довільна пряма, що проведена в тілі, залишається паралельною самій собі.*

Під час поступального руху тіла всі його точки рухаються по однакових траєкторіях (при накладанні вони збігаються) і мають в кожний момент часу однакові за величиною і напрямом швидкості та прискорення. Висновок: *вивчення поступального руху твердого тіла зводиться до вивчення руху однієї його будь-якої точки.* Таким чином все викладене в п.1 поширюється на випадок поступального руху тіла; наприклад, рівняння поступального руху твердого тіла в координатній формі мають вигляд (1.4).

Зауважимо, що тільки в разі поступального руху тіла можна говорити про траєкторію, швидкість та прискорення тіла. В усіх інших випадках ці поняття не мають фізичного змісту

2.2. Надзвичайно поширеним у техніці, а тому практично дуже важливим рухом тіла є обертальний рух тіла навколо нерухомої осі.

Обертанням тіла навколо нерухомої осі називається такий його рух, при якому дві точки тіла весь час залишаються нерухомими. Пряма, що проходить через зазначені дві нерухомі точки, називається *віссю обертання*.

Всі точки тіла, що лежать на осі обертання, нерухомі, а решта точок тіла описують кола, площини яких перпендикулярні до осі обертання, а центри лежать на цій осі (рис. 2.1).

З рис. 2.1, а маємо, що *закон обертального руху* твердого тіла навколо нерухомої осі має вигляд

$$\varphi = f(t), \tag{2.1}$$

це рівняння визначає положення тіла в будь-який момент часу. Характеристики обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі зведені у табл. 2.1.

Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі характеризується кутовою швидкістю ω та кутовим прискоренням ε: це фізичні величини, які відповідно характеризують зміни кута повороту φ тіла та його кутової швидкості ω з часом і обчислюються за формулами (2.2) та (2.3).

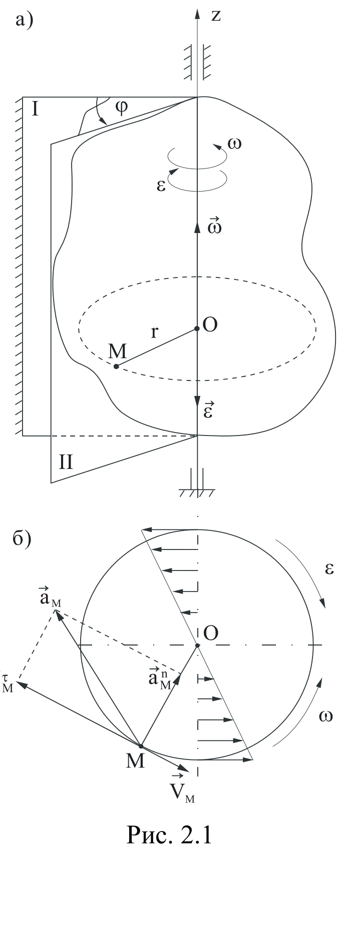


Рис. 2.1

Характеристики обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі *Таблиця 2.1*

Закон обертального руху	$\varphi = \varphi(t)$ (2.1)
Кутова швидкість тіла	$\omega = d\varphi / dt (c^{-1})$ (2.2)
Кутове прискорення тіла	$\varepsilon = d\omega / dt (c^{-2})$ (2.3)
Лінійна швидкість точки тіла	$V = \omega r$ (м/с) (2.4)
Лінійне прискорення точки тіла	$a = r\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$ (м/с^2) (2.5)
Нормальне прискорення точки	$a_n = \omega^2 r$ (2.6)
Тангенціальне прискорення точки	$a_\tau = \varepsilon r$ (2.7)
Шлях точки по колу	$S = r\varphi$ (2.8)
Рівномірне обертання (ω = *const*) /порівняй (1.22)/	$\varphi = \omega t$ (2.9)
Рівнозмінне обертання (ε = *const*)	$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon t^2 / 2$ (2.10) $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$ (2.11)
Прискорене обертання	$\omega > 0, \varepsilon > 0$ або $\omega < 0, \varepsilon < 0$
Сповільнене обертання	$\omega > 0, \varepsilon < 0$ або $\omega < 0, \varepsilon > 0$
Зв’язок між кутом повороту φ і числом обертів *N*:	$\varphi = 2\pi N$ (2.12)
Зв’язок між частотою обертання *n* (об/хв) та ω :	$\omega = 2\pi n / 60$ (2.13)

Зауважимо, що кутову швидкість ω можна зобразити вектором $\vec{\omega}$, який напрямляється вздовж осі обертання таким чином, що з кінця вектора видно поворот тіла проти годинникової стрілки. Аналогічно напрямляється вектор $\vec{\varepsilon}$: в той же бік що і $\vec{\omega}$, якщо обертання прискорене, і в протилежний бік – якщо обертання сповільнене (на рис. 2.1, а зображено випадок сповільненого обертання). Зауважимо, що вектори $\vec{\omega}$ та $\vec{\varepsilon}$ є *ковзними*. Крім того, на рис. 2.1,б зображений закон розподілу швидкостей відповідно (2.4).

Зазначимо, що φ, ω і ε - величини, які однакові для всіх точок тіла, вони є кінематичними характеристиками всього тіла.

Лінійні швидкості $\vec{V}$ і прискорення $\vec{a}$ мають різні значення в різних точках тіла, тому їх треба визначати окремо для кожної точки за формулами (2.4)…(2.7).

Всі особливості обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі наведені у табл. 2.1.

2.3. В задачах, де мова йде про передавання обертання від одного твердого тіла до іншого, слід враховувати спосіб передавання обертального руху: при внутрішньому зачепленні зубчастих коліс (рис. 2.2, а) та при прямій пасовій передачі (рис. 2.2, в) напрямок обертання обох коліс збігається; при зовнішньому зачепленні (рис. 2.2, б) та перехресній пасовій

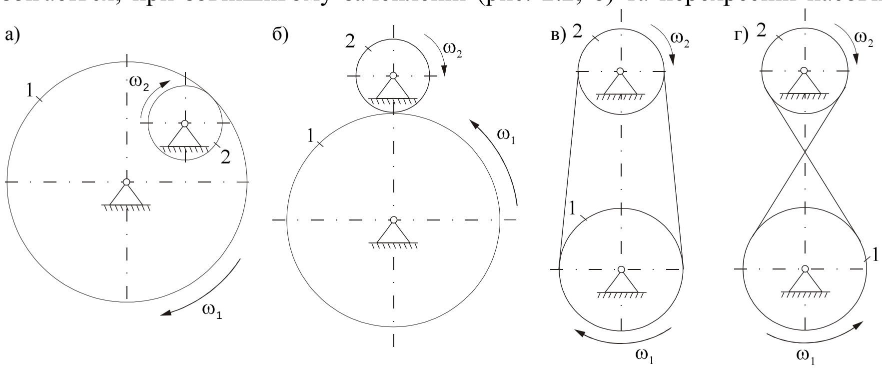


Рис. 2.2

передачі (рис. 2.2, г) напрямки обертання коліс протилежні.

Величини швидкостей на ободі зубчастих коліс, які перебувають в зачепленні, однакові. Однакові за величиною і швидкості на ободі шківів пасової передачі, якщо нехтувати ковзанням паса. Кутові швидкості коліс обернено пропорційні їх радіусам, або діаметрам, або числу зубців:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{z_2}{z_1}. \qquad (2.14)$$

ПРИКЛАД 2.1. Зубчаста рейка 1 рухається горизонтально за законом $S_1 = 8t - t^2$ м зі стану спокою і приводить в рух шестірні 2 та 3 (рис. 2.3). З шестірнею 3 радіуса R_3 = 0,2 м жорстко зв’язаний барабан радіуса $r_3 = 0{,}1$ м, на який намотаний нерозтяжний канат з вантажем А на кінці.

Визначити швидкість, прискорення та висоту підйому вантажу через 2 с після початку руху рейки.

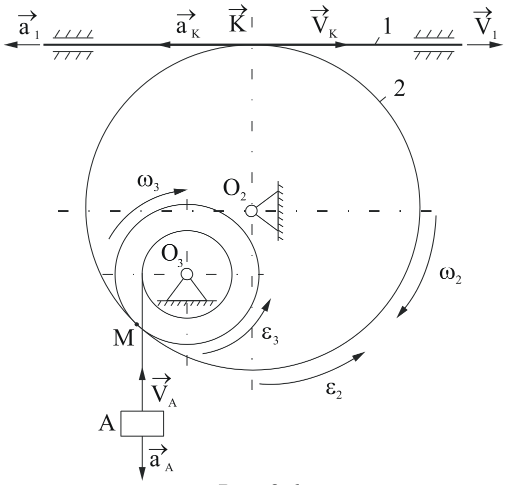


Рис. 2.3

Розв'язання почнемо з кінематичного аналізу руху системи (рис. 2.3): зубчаста рейка 1 рухається поступально, приводячи в обертальний рух шестірні 2 і 3, які перебувають у внутрішньому зачепленні і тому вони обертаються в одному напрямку (за годинниковою стрілкою), при цьому канат намотується на барабан 3 і вантаж A піднімається поступально.

Визначимо кінематичні характеристики руху для рейки 1:

$$V_1 = \dot{S}_1 = 8 - 2t \ \text{(м/с)},$$

$$a_1 = \dot{V}_1 = -2 \ \text{м/с}^2 = \text{const} < 0,$$

бо рух рейки прямолінійний. З рис. 2.3 маємо, що $V_M = V_K = V_1 = 8 - 2t$ м/с, бо з одного боку точка K належить рейці 1, яка рухається поступально, з іншого - шестірні 2 ($O_2M = O_2K = R_2$). Для точок K і M, які належать шестірні 2, також має місце $a_M^\tau = a_K^\tau = a_1 = -2$ м/с^2.

Знаходимо кутову швидкість ланки 3:

$$\omega_3 = V_M / R_3 = V_1 / R_3 \ ,$$

тоді $\varepsilon_3 = d\omega_3 / dt = a_M^\tau / R_3 = a_1 / R_3$. Відрізок канату BA з вантажем A рухається поступально, тому $V_A = V_B = \omega_3 r_3 = V_1 r_3 / R_3$ і $a_A = a_B^\tau = \varepsilon_3 r_3 = a_1 r_3 / R_3$ (останній результат можна було б отримати за формулою $a_A = dV_A / dt$, бо вантаж A рухається прямолінійно).

Висоту підйому вантажу визначаємо як $h_A = \varphi_3 r_3$, де $\varphi_3 = S_1 / R_3$, бо $\omega_3 = V_1 / R_3$ і при $t = 0$ був стан спокою. Таким чином, $h_A = S_1 r_3 / R_3$ м.

При $t = t_1 = 1$ с: $S_1 = 12$ м, $a_1 = -2$ м/с^2 , $V_1 = 4$ м/с, тоді $V_A = 2$ м/с, $a_A = -1$ м/с^2 , $h_A = 6$ м.

Відповідь: через 2 с після початку руху рейки 1 швидкість вантажу A дорівнює 2 м/с, рух рівносповільнений з прискоренням $a_A = 1$ м/с^2, вантаж підніметься на висоту $h_A = 6$ м.

ПРИКЛАД 2.2. Під час обертання рукоятки O_1A домкрата (рис. 2.4) його шестірні починають обертатися і приводять в рух зубчасту рейку BC, яка рухається відповідно до закону $x = 0{,}1t^2$ м (t - в секундах). Знайти швидкість та прискорення кінця A рукоятки в момент часу $t_1 = 2$ с, якщо O_1A = 0,2 м, $r_5 = 0{,}1$ м, а шестірні мають відповідну кількість зубців: $z_1 = 6$, $z_2 = 24$, $z_3 = 8$, $z_4 = 32$.

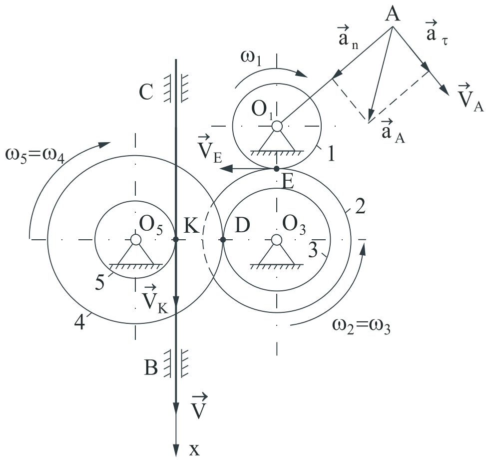


Рис. 2.4

Розв'язання починаємо з кінематичного аналізу руху ланок механізму: рукоятка O_1A обертається навколо осі, що проходить через точку O_1, разом з нею обертається шестірня 1 $(\omega_1 = \omega_{OA})$, бо в рукоятки O_1A і шестірні 1 спільна вісь обертання. Шестірні 1 і 2 знаходяться у зовнішньому зачепленні, як і шестірні 3 та 4. Зауважимо, що шестірні 2 та 3 мають спільну вісь обертання O_3 $(\omega_2 = \omega_3)$, як і шестірні 4 та 5 $(\omega_4 = \omega_5)$. Рейка BC рухається поступально, тобто $V = V_K$.

Точка A обертається разом з рукояткою O_1A, тому відповідно (2.4) та (2.5) маємо:

$$V_A = \omega_1 \cdot AO_1, \quad a_A = AO_1\sqrt{\omega_1^4 + \varepsilon_1^2}.$$

Розв'язання по суті звелося до визначення $\omega_1 = \omega_{OA}$ через V. Маємо $\omega_4 = \omega_5 = V_K / r_5 = V / r_5$. Тоді $V_D = \omega_4 r_4 = V r_4 / r_5$, але точка D належить також шестірні 3, тому $\omega_3 = V_D / r_3 = V r_4 / r_3 r_5$ і маємо, що $V_E = \omega_2 r_2 = \omega_3 r_2 = V r_2 r_4 / r_3 r_5$. З іншого боку, $V_E = \omega_1 r_1$, тому $\omega_1 = V r_2 r_4 / r_1 r_3 r_5$, де $V = dx/dt = 0{,}2t$. Крім того, має місце (2.14), тому $\omega_1 = 0{,}2t \cdot z_2 z_4 / (z_1 z_3 \times 0{,}1) = 32t$ (c^{-1}), $\varepsilon_1 = d\omega_1/dt = 32$ (c^{-2}). Остаточно маємо при $t = t_1 = 2$ с:

$$\omega_1 = 64 \ \text{с}^{-1}; \quad V_A = \omega_1 \cdot AO_1 = 64 \cdot 0{,}2 = 12{,}8 \ \text{м/с};$$

$$\varepsilon_1 = 32 \ \text{с}^{-2}; \ \ a_A = AO_1\sqrt{\omega_1^4 + \varepsilon_1^2} = 0{,}2\sqrt{64^4 + 32^2} = 819{,}2 \ \text{м/с}^2.$$

Відповідь: через 2 секунди після початку обертання рукоятки O_1A її кінець A має швидкість $V_A = 12{,}8$ м/с та прискорення $a_A = 819{,}2$ м/с^2.

ПРИКЛАД 2.3. В механізмі (рис. 2.5) рух від колеса 1 передається шківу 2, а від нього за допомогою нескінченного паса ступінчастому барабану 3, за допомогою якого піднімають вантаж *A*. Визначити швидкість та прискорення вантажу *A* через 1 секунду після початку руху механізму і висоту підйому вантажу *A* за цей час, якщо $\varphi_1 = 3t - t^2$ рад, $R_1 = 0{,}25$ м, $R_3/r_3 = 2$, $r_3 = 0{,}5$ м; крім того, визначити швидкість та прискорення точки *B* в цей момент часу і зобразити їх на рисунку.

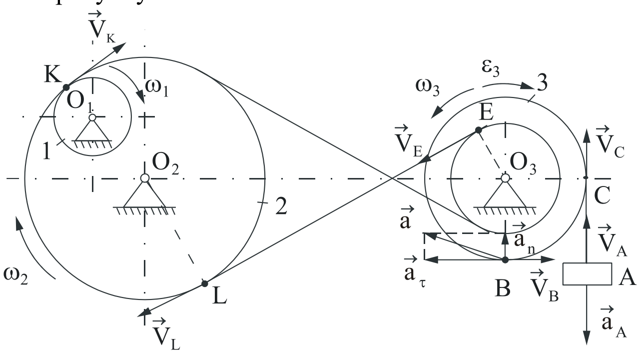


Рис. 2.5

Розв'язання задачі починається з кінематичного аналізу руху елементів механізму: колесо 1, шків 2 та барабан 3 обертаються відповідно навколо осей, що проходять через точки $O_1, O_2, O_3,$ а вантаж *A* рухається поступально.

Визначимо кутову швидкість обертання колеса 1:

$$\omega_1 = d\varphi_1/dt = 3 - 2t \quad (\text{с}^{-1}).$$

Очевидно, що $V_K = \omega_1 R_1 = V_L$, бо $O_2K = O_2L$. Пас EL рухається поступально, тому $V_E = V_L = V_K = \omega_1 R_1$, але точка *E* належить також барабану 3 і маємо $V_E = \omega_3 r_3$, звідки $\omega_3 = V_E/r_3 = \omega_1 R_1/r_3 = (3 - 2t) \ \times 0{,}25/0{,}5 = 1{,}5 - t$ с$^{-1}$. Знаючи ω_3, знаходимо кутове прискорення барабана та його кут повороту:

$$\varepsilon_3 = d\omega_3/dt = -1 \ (\text{с}^{-2}), \ \varphi_3 = \varphi_1 R_1/r_3, \text{ бо } \omega_3 = \omega_1 R_1/r_3 .$$

Маємо при $t = t_1 = 1$ с:

$$\omega_3 = 0{,}5 \text{ с}^{-1}, \ \varepsilon_3 = -1 \text{ с}^{-2}, \ \varphi_3 = \varphi_1/2 = (3t_1 - t_1^2)/2 = 1 \text{ рад},$$
$$V_A = V_C = V_B = \omega_3 R_3 = 0{,}5 \cdot 1 = 0{,}5 \text{ м/с},$$
$$a_A = a_B^\tau = a_C^\tau = \varepsilon_3 R_3 = -1 \text{ м/с}^2,$$
$$a_B^n = \omega_3^2 \cdot R_3 = 0{,}25 \text{ м/с}^2,$$
$$a_B = \sqrt{(a_B^n)^2 + (a_B^\tau)^2} = \sqrt{0{,}25^2 + (-1)^2} = 1{,}03 \text{ м/с}^2.$$

Визначимо висоту підйому вантажу *A*, враховуючи що $V_A = ds/dt$, звідки $ds = V_A dt$ або

$$\int_0^h ds = \int_0^{t_1} (1{,}5 - t) R_3 dt .$$

Маємо $h = h_A = R_3 (1{,}5t_1 - t_1^2/2) = 1(1{,}5 - 0{,}5) = 1$ м. Цей же результат можна отримати як $h = h_A = \varphi_3 \cdot R_3$, де $\varphi_3 = 1$ рад при $t = t_1 = 1$ с і $R = 1$ м.

Відповідь: через 1 секунду після початку руху механізму маємо $V_A = V_B = 0{,}5$ м/с, $a_B = 1{,}03$ м/с^2, $a_A = -1$ м/с^2 і вантаж *A* піднявся на висоту $h = 1$ м.

3. Плоский рух твердого тіла

3.1. Вивчення плоскопаралельного (плоского) руху твердого тіла має велике практичне значення, бо більшість деталей будівельних і меліоративних машин та механізмів виконують саме цей рух, знайомство з яким слід починати з його визначення [2, 3]: *плоским* або *плоскопаралельним* рухом називається такий рух тіла, при якому всі його точки рухаються паралельно деякій нерухомій площині. З'ясувавши, що вивчення плоского руху зводиться до вивчення руху плоскої фігури (перерізу S тіла площиною, паралельного цій нерухомій площині), приходимо до висновку (рис. 3.1), що плоский рух можна розглядати як синтез двох найпростіших рухів (див. розділ 2): поступального разом з полюсом А (φ = const) та обертального навколо нього(X_A= *const*, Y_A = *cosnt)*. Слід зауважити, що характеристики поступальної частини плоского руху залежать від вибору полюса, а обертальної – ні. Отже, рух плоскої фігури на площині можна визначити такими рівняннями:

$$X_A = X_A(t)\ ,\ Y_A = Y_A(t)\ ,\ \varphi = \varphi(t). \qquad (3.1)$$

3.2. Швидкість будь-якої точки *B* тіла при його плоскому русі дорівнює геометричній сумі швидкостей полюса *A* та обертальної швидкості точки *B* навколо полюса *A*: $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$. (3.2)

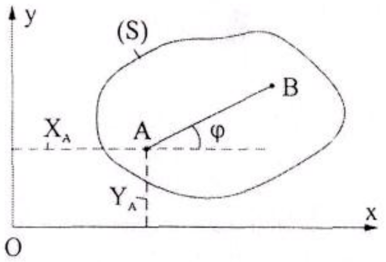


Рис. 3.2

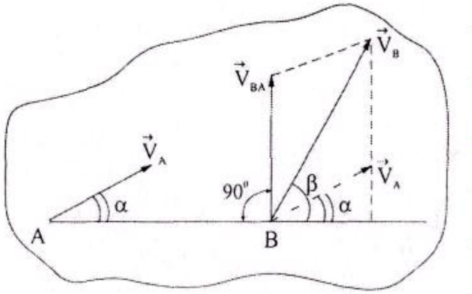


Рис. 3.3

Під час розв'язування практичних задач користуються теоремою про проекції швидкостей двох точок тіла на пряму, що з'єднує їх (рис. 3.3):

$$V_B\,\boldsymbol{cos}\beta = V_A\,\boldsymbol{cos}\alpha \qquad (3.3)$$

3.3. Під час визначення швидкостей точок плоскої фігури крім двох теорем (п. 3.2.) застосовують спосіб, який базується на понятті *миттєвого центру швидкостей* (МЦШ) - це точка *P,* швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю (V_P =0). Зауважимо, що МЦШ *P* не завжди належить тілу, але завжди лежить в рухомій площині, яка рухається разом з тілом. Можна показати, що така точка завжди існує і вона є єдиною.

Якщо за полюс взяти в даний момент часу МЦШ Р, то плоский рух можна розглянути як обертальний рух навколо нього:

$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \ldots = \frac{V_K}{KP}. \qquad (3.4)$$

Щоб знайти МЦШ в загальному випадку (рис. 3.3, а), досить знати лише напрями швидкостей двох точок плоскої фігури: МЦШ лежить на перетині перпендикулярів, які проведені через точки прикладання швидкостей цих точок до їх напрямів. Для визначення швидкості довільної точки необхідно додатково знати величину однієї з двох швидкостей і використати співвідношення (3.4). Таким чином, кутова швидкість тіла при плоскому русі дорівнює в кожний момент часу відношенню швидкості будь-якої точки до її віддалі до МЦШ:

$$\omega = V_K \;/\; KP. \qquad (3.5)$$

Окремі випадки знаходження МЦШ зображені на рис. 3.3, б.. .3.3, е.

Під час розв'язування задач слід пам'ятати, що поняття про МЦШ або теорему (3.3) слід застосовувати *до кожної ланки механізму окремо і всі дослідження і розрахунки вести лише для заданого положення механізму.*

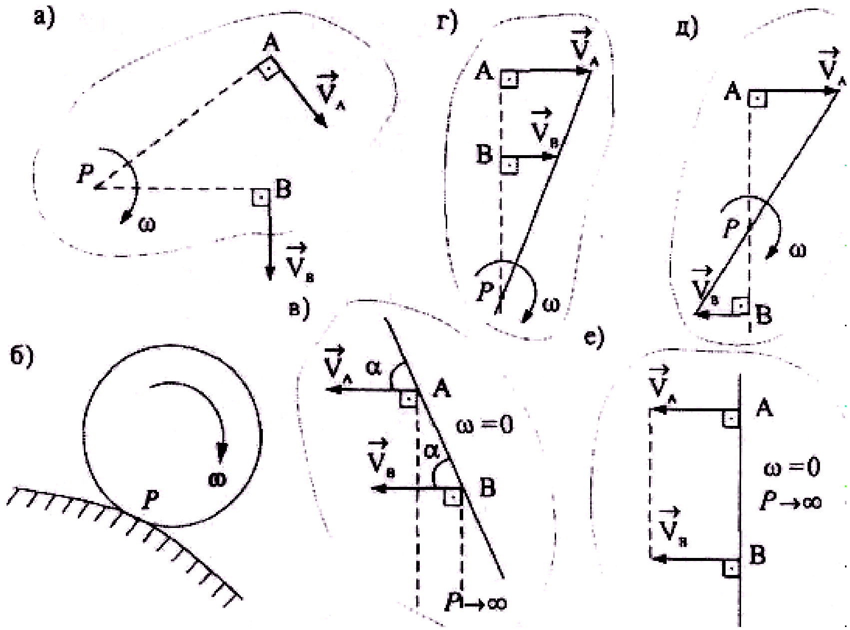
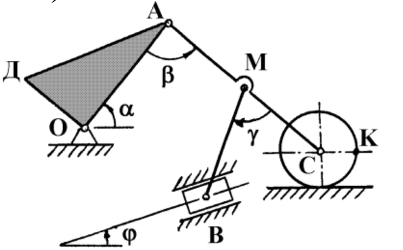


Рис. 3.3

ПРИКЛАД 3.1. Для заданого положення механізму, яке визначається кутами α, β, γ, φ (рис. 3.4,а), визначити швидкості точок *B*, *C*, *K* та кутові швидкості всіх його ланок, якщо прямокутний трикутник *ОАД* (один з кутів якого 30^o) обертається за годинниковою стрілкою зі сталою кутовою швидкістю $\omega = 6\ c^{-1}$ і приводить в рух решту ланок механізму. Розрахунки провести для OA = 0,8 м, l_1 = 1 м, l_2 = 1.5 м, R = 0,5 м, $\alpha = 30^o$, $\beta = 120^o$, $\gamma = 60^o$, $\varphi = 90^o$.

а)



б)

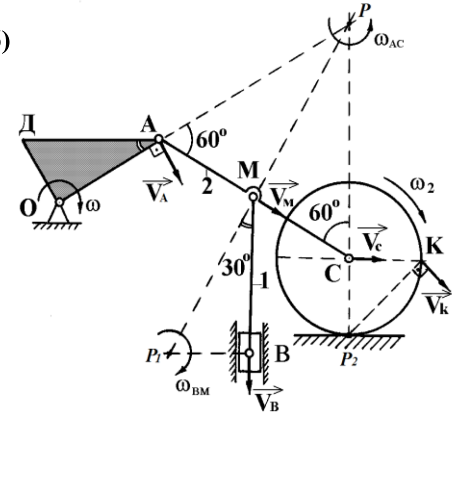


Рис. 3.4

Побудову механізму починати з ланки, напрям якої визначається кутом α; кути відкладати в напрямках зазначених на схемі.

Розв'язання починаємо з побудови заданого положення механізму (рис. 3.4,б) у відповідності з умовою задачі. Після цього робимо кінематичний аналіз руху окремих ланок механізму : трикутник *ОАД* обертається навколо осі, що проходить через точку *О*; ланки *АС, МВ* та колесо рухаються плоскопаралельно і кожна в даний момент часу має свій миттєвий центр швидкостей (МЦШ); повзун *В* рухається поступально.

Виходячи з умови задачі, знаходимо швидкість точки А, враховуючи (2.4):

$$V_{\text{A}} = \omega \cdot OA = 6 \cdot 0{,}8 = 4{,}8 \text{ (м/с)}.$$

Вектор швидкості $\vec{V}_A$ напрямлений перпендикулярно до *ОА* в бік обертання (рис. 3.4,а).

Для знаходження МЦШ *Р* для ланки *АС* необхідно показати напрям швидкості точки *С* : віддаль від центра колеса до горизонтальної поверхні стала і точка *С* рухається праворуч по прямій (рис. 3.4,б). Проводимо перпендикуляри до $\vec{V}_A$ та $\vec{V}_C$ через точки їх прикладання і знаходимо МЦШ *Р* (аналогічно рис. 3.3,а); маємо (3.4) :

$$\omega_{AC} = V_A / AP = V_M / MP = V_C / CP,$$

де $AP = CP = AC = 1{,}5$ м, бо $\Delta\, APC$ рівносторонній,

$$MP = AP \sin 60^o = 1{,}5 \cdot 0{,}866 = 1{,}299 \text{ (м)}.$$

Тепер знаходимо :

$$\omega_{AC} = V_A/AP = 4{,}8 / 1{,}5 = 3{,}2 \text{ (с}^{-1}\text{)};$$

$$V_C = V_A = 4{,}8 \text{ м/с}, \quad \text{бо} \quad CP = AP;$$

$$V_M = \omega_{AC} \cdot MP = 3{,}2 \cdot 1{,}299 = 4{,}16 \text{ (м/с)}.$$

Напрямляємо ω_{AC} : стаємо в МЦШ *Р*, дивимось на $\vec{V}_A$ і бачимо, що миттєве обертання ланки АС навколо Р відбувається проти годинникової стрілки. Вектор $\vec{V}_M \perp MP$ і напрямлений в бік ω_{AC}.

Аналогічно розглядаємо рух ланки *МВ* : напрям швидкості повзуна *В* обумовлений вертикальними напрямними і МЦШ P_1 для ланки МВ лежить на перетині перпендикулярів до $\vec{V}_M$ та $\vec{V}_B$ (рис. 3.4,б). Маємо (3.4) :

$$\omega_{BM} = V_M / MP_1 = V_B / BP_1 ,$$

де $BP_1 = MB\, tg\, 30^o = 1 \cdot 0{,}577 = 0{,}577$ (м),

$MP_1 = BP_1 / \sin 30^o = 0{,}577 / 0{,}5 = 1{,}154$ (м). Обчислимо :

$$\omega_{BM} = V_M / MP_1 = 4{,}16 / 1{,}154 = 3{,}60 \text{ (с}^{-1}\text{)}$$

$$V_B = \omega_{BM} \cdot BP_1 = 3{,}60 \cdot 0{,}577 = 2{,}08 \text{ (м/с)}.$$

Розглянемо плоский рух колеса. Точка дотику P_2 колеса до нерухомої поверхні (рис.3.4,б) є МЦШ для колеса – порівняйте з випадком на (рис.3.3,б). Через те, що МЦШ P_2 є миттєвим центром обертання для колеса, маємо (3.4) :

$$\omega_2 = V_C / CP_2 = V_K / KP_2 ,$$

але $CP_2 = R$, тому $\omega_2 = 4{,}8 / 0{,}4 = 12$ (c^{-1}) і

$V_K = \omega_2 \cdot KP_2 = \omega_2 \cdot R\sqrt{2} = 12 \cdot 0{,}4\sqrt{2} = 6{,}79$ (м/с);

$\overrightarrow{V_K} \perp KP_2$ і напрямлене в бік ω_2.

Відповідь : $V_B = 2{,}08$ м/с; $V_C = 4{,}8$ м/с; $V_K = 6{,}79$ м/с;
$\omega_{AC} = 3{,}2$ c^{-1}; $\omega_{BM} = 3{,}6$ c^{-1}; $\omega_2 = 12$ c^{-1}.

3.4. Під час визначення прискорень плоскої фігури виходять із закону розподілу прискорень при плоскому русі [2, 3]:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{\,n}_{BA} + \vec{a}^{\,\tau}_{BA} , \qquad (3.6)$$

де A - полюс; $a^n_{BA} = \omega^2_{AB} \cdot AB$, $a^\tau_{BA} = \varepsilon_{AB} AB$; вектор $\vec{a}^{\,n}_{BA}$ напрямлений від B до A , вектор $\vec{a}^{\,\tau}_{BA}$ перпендикулярний до $\vec{a}^{\,n}_{BA}$ і напрямлений в бік ε_{AB} . Якщо полюс A рухається непрямолінійно, то $\vec{a}_A = \vec{a}^{\,n}_A + \vec{a}^{\,\tau}_A$; нарешті, коли точка B рухається по кривій, то $\vec{a}_B = \vec{a}^{\,n}_B + \vec{a}^{\,\tau}_B$ в (3.6).

Для знаходження невідомих прискорень векторну рівність (3.6) проектують на осі координат X, $У$ і розв'язують отриману систему рівнянь відносно невідомих.

Основні випадки обчислення кутового прискорення при плоскому русі твердого тіла розглянемо на конкретних прикладах.

ПРИКЛАД 3.2. Кривошип OA кривошипно-шатунного механізму (рис. 3.5, а) обертається навколо осі, що проходить через точку O, з кутовою швидкістю, яка змінюється за законом $\omega = 2 - t$ c^{-1} . Через $t_1 = 1$ с механізм займає положення, яке зображене на рис. 3.5, а. Визначити для цього положення швидкість і прискорення повзуна B та

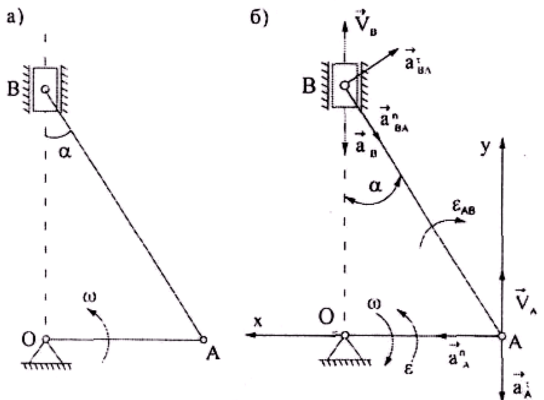


Рис. 3.10

кутову швидкість і кутове прискорення шатуна *AB,* якщо OA = 0,5 м, $\alpha = 30°$.
Розв'язання. Проводимо кінематичний аналіз руху окремих ланок механізму: кривошип *OA* обертається навколо осі, що проходить через точку *O*; повзун *B* рухається поступально в вертикальних напрямних; шатун *AB* рухається плоскопаралельно.

Визначаємо кутову швидкість та кутове прискорення кривошипа *OA* для заданого положення механізму ($t = t_1$ = 1 с): $\omega_{OA} = \omega$ = 1 с$^{-1}$, $\varepsilon_{OA} = \varepsilon = d\omega / dt$ = - 1 с$^{-2}$, тобто кривошип у даний момент часу обертається сповільнено.

Знаходимо швидкість пальця *A* ($V_A = \omega \cdot OA$ = 0,5 м/с) і напрямляємо її перпендикулярно до радіуса обертання *OA* в бік обертання (рис. 3.5, б). Напрям швидкості повзуна *B* обумовлений вертикальними напрямними, тому $\vec{V}_B \parallel \vec{V}_A$ і МЦШ для шатуна *AB* лежить у нескінченості (порівняйте випадок на рис. 3.3, в) і маємо (3.5):

$$\omega_{AB} = V_A / AP = V_A / \infty = 0 , \quad V_B = V_A = 0{,}5 \text{ м/с}.$$

Таким чином, шатун *AB* у даний момент часу рухається миттєво поступально; миттєва рівність нулю кутової швидкості ω_{AB} не дає права зробити хибний висновок, що і ε_{AB} = 0 в цей момент часу, що підтвердимо подальшим розв'язанням.

Визначимо прискорення повзуна *B* за формулою (3.6) і врахуємо, що палець *A,* який прийнято за полюс, обертається разом з кривошипом:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^{\,n} + \vec{a}_A^{\,\tau} + \vec{a}_{BA}^{\,n} + \vec{a}_{BA}^{\,\tau} , \tag{3.7}$$

де $a_A^n = \omega^2 \cdot OA = 0{,}5$ м/с^2; $a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 0$;

$$a_A^\tau = \varepsilon \cdot OA = -0{,}5 \text{ м/с}^2; \quad a_{BA}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot AB = ?$$

Вектор $\vec{a}_A^{\,n}$ напрямлений від *A* до центра обертання *O* , вектор $\vec{a}_A^{\,\tau}$ лежить на одній прямій зі швидкістю $\vec{V}_A$, протилежно їй напрямлений ($\omega_{OA} > 0$, $\varepsilon_{OA} < 0$) і перпендикулярний до $\vec{a}_A^{\,n}$. Вектор $\vec{a}_{BA}^{\,n}$ (рис. 3.5, б) зобразимо формально ($\vec{a}_{BA}^{\,n} = 0$), бо вектор $\vec{a}_{BA}^{\,\tau}$ завжди перпендикулярний до $\vec{a}_{BA}^{\,n}$. Величина і напрям $\vec{a}_{BA}^{\,\tau}$ невідомі, тому зображуємо його перпендикулярно до $\vec{a}_{BA}^{\,n}$ в будь-який бік: знак відповіді підтвердить (+) або спростує (-) вибір напряму $\vec{a}_{BA}^{\,\tau}$. Вектор $\vec{a}_B$ лежить на одній прямій зі швидкістю $\overrightarrow{V_B}$, зобразимо його протилежно до $\overrightarrow{V_B}$, а відповідь підтвердить чи спростує наш вибір.

Вибираємо осі координат *XAY* (рис. 3.5, б) і проектуємо рівність (3.7) на ці осі:

$$0 = -a_{BA}^\tau \cos 30° + a_A^n ,$$

$$-a_B = a_{BA}^\tau \sin 30° - a_A^\tau ,$$

звідси $a_{BA}^{\tau} = a_A^n / \cos 30° = 0{,}5 / 0{,}866 = 0{,}577$ (м/с^2),

$$a_B = a_A^{\tau} - a_{BA}^{\tau} \sin 30° = 0{,}5 - 0{,}577 \cdot 0{,}5 = 0{,}212 \quad (\text{м/с}^2).$$

Знаки "+" вказують на те, що вектори $\vec{a}_B$ та $\vec{a}_{BA}^{\tau}$ напрямлені на рис. 3.5, б правильно. Вектор $\vec{a}_{BA}^{\tau}$ визначає напрям кутового прискорення ε_{AB}: треба стати в точку A і подивитись на $\vec{a}_{BA}^{\tau}$ (рис. 3.5, б). Визначаємо величину ε_{AB}:

$$\varepsilon_{AB} = a^{\tau}_{BA} / AB = a^{\tau}_{BA} / 2 \cdot AO = 0{,}577 \text{ с}^{-2}$$

Відповідь: для заданого положення механізму (рис. 3.5, а) повзун B рухається сповільнено і має швидкість V_B = 0,5 м/с та прискорення a_B =0,212 м/с^2 ; шатун AB в цей момент часу має кутову швидкість ω_{AB} = О та кутове прискорення ε_{AB} = 0,577 с$^{-2}$.

ПРИКЛАД 3.3. Барабан C радіуса R = 0,4 м жорстко скріплений з котком D радіуса r = 0,3 м, який котиться без ковзання по нахиленій площині (рис. 3.6). Через блок E перекинута нитка, яка намотана на барабан C; до кінця нитки прикріплено вантаж A. Визначити швидкості та прискорення точок B, P і вантажу A для того моменту часу, коли швидкість і прискорення центра O дорівнюють V_0 = 0,6 м/с, a_0 = 0,3 м/с^2.

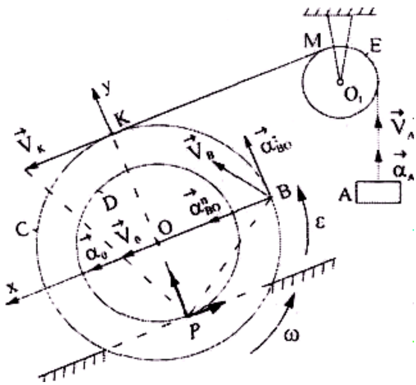


Рис. 3.6

Розв'язання. Система барабан-коток рухається плоскопаралельно (МЦШ для неї знаходиться в точці P дотику котка D з нерухомою поверхнею - порівняй випадок на рис. 3.3, б); блок E обертається навколо осі, що проходить через точку O_1 ; вантаж A рухається поступально. Після кінематичного аналізу рухів окремих ланок системи, зображеної на рис. 3.6, переходимо до визначення швидкостей точок B, P та A. Очевидно, що V_P = 0, бо P -МЦШ. Маємо (3.4):

$\omega_{кол} = \omega = V_0 / OP = V_B / BP = V_M / MP$, таким чином,

$\omega = V_0 / OP = V_0 / r$ = 2 с$^{-1}$, (м/с),

$$V_B = \omega \cdot BP = \omega \sqrt{R^2 + r^2} = 2 \cdot 0{,}5 = 1 \,(\text{м/с}),$$

$$V_K = \omega \cdot KP = (R + r) = 2 \cdot 0{,}7 = 1{,}4 \text{ (м/с)}.$$

З рис. 3.6 видно, що $V_A = V_K = 1{,}4$ м/с. Так як P є миттєвим центром обертання, то $\vec{V}_B \perp BP$ і $\vec{V}_K \perp KP$ і напрямлені в бік обертання.

Визначимо a_B за формулою (3.6), прийнявши за полюс центр O, бо для нього відоме прискорення:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_O + \vec{a}^{\,n}_{BO} + \vec{a}^{\,\tau}_{BO} \quad , \tag{3.8}$$

де $a^n_{BO} = \omega^2 \cdot BO = \omega^2 R = 1{,}6$ м/с^2 , $a^\tau_{BO} = \varepsilon \cdot BO = \varepsilon \cdot R = 0{,}4$ м/с^2.

Тут $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{V_O}{OP}\right) = \dfrac{1}{OP}\left(\dfrac{dV_O}{dt}\right) = \dfrac{a_O}{OP} = \dfrac{a_O}{r} = 1$ с$^{-1}$.

Важливо пам'ятати, що таким чином можна обчислювати кутове прискорення лише в тому випадку, коли віддаль від точки до МЦШ Р є весь час величиною сталою. Спроектуємо рівність (3.8) на осі координат X, Y (рис. 3.6), попередньо напрямивши вектор $\vec{a}^{\,n}_{BO}$ від B до O, а вектор $\vec{a}^{\,\tau}_{BO}$ зображаємо перпендикулярно до $\vec{a}^{\,n}_{BO}$ в бік ε:

$a_{BX} = a_O + a^n_{BO} = 1{,}9$ м/с^2 , $a_{BY} = a^\tau_{BO} = 0{,}4$ м/с^2 ;

тоді $a_B = \sqrt{a^2_{BX} + a^2_{BY}} = 1{,}94$ м/с^2 .

Аналогічно знаходимо a_p (3.6):

$$\vec{a}_P = \vec{a}_O + \vec{a}^{\,n}_{PO} + \vec{a}^{\,\tau}_{PO} \quad , \tag{3.9}$$

де $a^n_{PO} = \omega^2 \cdot OP = 1{,}2$ м/с^2 , $a^\tau_{PO} = \varepsilon \cdot PO = 0{,}3$ м/с^2 .

Проектуємо векторну рівність (3.9) на осі координат X , Y:

$a_{PX} = a_O - a^\tau_{PO} = 0$, $a_{PY} = a^n_{PO} = 1{,}2$ м/с^2;

остаточно маємо:

$a_P = a^n_{PO} = 1{,}2$ м/с^2 .

Прискорення вантажу A дорівнює тангенціальній складовій повного прискорення точки K , бо вона одночасно належить барабану і вірьовці, яка підтримує вантаж A :

$a_A = a^\tau_K = \varepsilon \cdot KP = \varepsilon (R + r) = 0.7$ м/с^2.

Відповідь: для заданого моменту часу маємо $V_A = 1{,}4$ м/с, $a_A = 0{,}7$ м/с^2; $V_B = 1$ м/с, $a_B = 1{,}36$ м/с^2; $V_P = 0$, але $a_P = 1{,}2$ м/с^2 і напрямлений вектор $\vec{a}_P$ від точки P до точки O ($\vec{a}_P = \vec{a}^{\,\tau}_{PO}$) .

4. Складний рух точки

4.1. Якщо точка рухається по тілу, яке в свою чергу рухається відносно нерухомої системи координат, то така точка виконує с к л а д н и й р у х відносно нерухомої системи координат [2, 3], поняття про яку є умовне, бо нема сенсу говорити про "нерухому взагалі" систему координат. Точка, яка виконує складний рух, має відповідно абсолютну, відносну та переносну траєкторії, швидкості $(\vec{V}, \vec{V}_r, \vec{V}_e)$ і прискорення $(\vec{a}, \vec{a}_r, \vec{a}_e)$. Тому слід перш за все розібратися і чітко зрозуміти, що уявляють собою відносний та переносний рухи точки як складові її абсолютного руху; розуміння суті засвоєного слід закріпити шляхом розбору прикладів з реального життя: рух пасажира в будь-якому транспорті, що рухається; рух людини, що пливе по річці, по відношенню до нерухомого берега; рух кранового візка вздовж стріли крана, яка в свою чергу обертається навколо вертикальної осі тощо.

4.2. Під час розв'язання задач на визначення абсолютної швидкості точки, коли відомі складові її руху, або при розв'язанні задач, в яких складний рух точки розкладається на складові частини – відносний і переносний рухи, *користуються теоремою про додавання швидкостей*, згідно якої абсолютна швидкість точки дорівнює геометричній сумі швидкостей в переносному та відносному рухах:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r . \qquad (4.1)$$

Оскільки абсолютна швидкість визначається діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах $\vec{V}_e$ та $\vec{V}_r$ як на сторонах (4.1), то модуль $\vec{V}_a$ визначається за формулою:

$$V_a = \sqrt{V_e{}^2 + V_r{}^2 + 2V_e V_r \cos(\vec{V}_e, \vec{V}_r)} . \qquad (4.2)$$

Зауважимо, що модуль $\vec{V}_a$ можна визначити також шляхом проектування рівняння (4.1) на осі координат ($V_x = V_{ex} + V_{rx}$, $V_y = V_{ey} + V_{ry}$, $V_z = V_{ez} + V_{rz}$) і тоді:

$$V_a = \sqrt{V_x{}^2 + V_y{}^2 + V_z{}^2} . \qquad (4.3)$$

4.3. Визначаючи абсолютне прискорення точки треба з'ясувати характер її переносного руху: поступальний чи непоступальний. Якщо переносний рух непоступальний, то абсолютне прискорення точки визначається за теоремою Коріоліса: *у випадку непоступального переносного руху абсолютне прискорення точки дорівнює геометричній сумі переносного, відносного та Коріолісова прискорення*, яка записується рівнянням:

$$\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c . \qquad (4.4)$$

4.4. Прискорення Коріоліса або поворотне прискорення виражається формулою

$$\vec{a}_c = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r)\ , \qquad (4.5)$$

його величина дорівнює

$$a_c = 2\omega_e V_r \sin(\vec{\omega}_e \overset{\wedge}{,} \vec{V}_r)\ . \qquad (4.6)$$

Слід також нагадати, що прискорення Коріоліса дорівнює нулеві, якщо:

а) переносний рух є поступальним ($\omega_e = 0$) або в даний момент часу $\omega_e = 0$;

б) відносна швидкість V_r в даний момент часу дорівнює нулеві;

в) вектор відносної швидкості $\vec{V}_r$ паралельний вектору кутової швидкості переносного обертального руху $\vec{\omega}_e$, що відповідає випадкам, коли кут між векторами $\vec{V}_r$ і $\vec{\omega}_e$ дорівнює 0° або 180°.

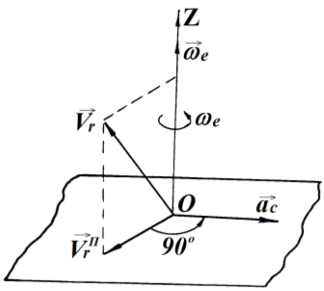


Рис. 4.1

Напрям прискорення Коріоліса визначається за правилом визначення напряму векторного добутку: вектори $\vec{\omega}_e$, $\vec{V}_r$ та $\vec{a}_c$ становлять праву систему ортогональних векторів. Якщо виникають труднощі при визначенні напряму прискорення Коріоліса $\vec{a}_c$, то доцільно користуватися правилом Жуковського: *необхідно вектор відносної швидкості $\vec{V}_r$ спроектувати на площину, яка перпендикулярна до осі переносного обертання Oz (рис. 4.1) і повернути проекцію $\vec{V}_r^{\Pi}$ в цій площині на кут* 90° *у напрямі переносного обертання.*

4.5. У випадку переносного поступального руху $\omega_e = 0$ і $a_c = 0$. Таким чином, при поступальному переносному русі абсолютне прискорення точки дорівнює геометричній сумі відносного і переносного прискорень:

$$\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r\ . \qquad (4.7)$$

Цей результат аналогічний тому, який дає теорема про додавання швидкостей (4.1).

4.6. *Під час розв'язування задач слід завжди зображати точку, рух якої вивчаємо, у тому положенні, для якого шукаємо необхідну величину, а не довільно.* Подальша послідовність дій така:

- вибрати дві системи координат (рухому та нерухому);

- розкласти рух точки на складові і чітко розрізнити переносний, відносний та абсолютний рухи точки;

-з рівності (4.1) визначити шукану величину: або V_a за формулою (4.2) чи (4.3);

- з'ясувати характер переносного руху точки (поступальний чи обертальний*) і записати теорему для визначення прискорення відповідно у вигляді (4.4) або (4.7), пам'ятаючи, що при обертальному русі $\vec{a}_e = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau$;

- з'ясувати характер відносного руху: прямолінійний ($\vec{a}_r = \vec{a}_r^\tau$) чи криволінійний $\vec{a}_r = \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau$ і врахувати це в (4.4) або (4.7);

- обчислити величини всіх векторів, що входять в (4.4) або (4.7) і зобразити їх на рисунку відповідно правилам для нормального, тангенціального прискорення та прискорення Коріоліса;

- спроектувати рівність (4.4) або (4.7) на осі рухомих координат *X, Y, Z* і обчислити

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \ . \tag{4.8}$$

ПРИКЛАД 4.1. Квадрат (рис. 4.2, а) обертається в своїй площині навколо осі, що проходить через точку O_1 за законом $\varphi_e = 4\sin(\pi t/8)$ рад. Одночасно вздовж рівчака рухається точка M відповідно рівнянню $OM = S = \pi t^2/8$ м. Визначити абсолютну швидкість і абсолютне прискорення точки M в момент часу $t_1 = 2$ с, якщо $R = 1$ м.

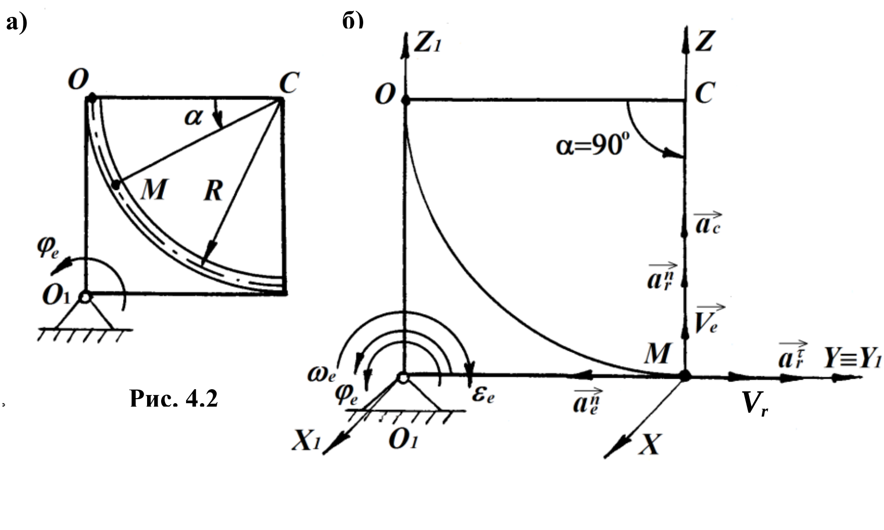


Рис. 4.2

Розв'язання. З'ясуємо характер руху точки *M*, для чого рухому систему координат XYZ жорстко зв'яжемо з квадратом, а нерухому $O_1X_1Y_1Z_1$ – з віссю O_1. В разі такого вибору осей координат рух точки M по дузі кола є відносним, а обертальний рух тієї точки квадрата, з якою в даний момент часу збігається точка *M*, є для неї переносним. Рух точки *M* відносно нерухомої системи координат $O_1X_1Y_1Z_1$ є абсолютний.

Визначимо положення точки *M* в момент часу t_1 = 2 с:

$$\cup OM = \pi t_1^2/8 = \pi/2 \text{ (м)}; \; \alpha = \cup OM/R = \pi/2 \text{ (рад)}.$$

Зображаємо точку M на рис. 4.2, б.

Обчислимо абсолютну швидкість точки *M* за теоремою (4.1):

$$\vec{V}_M = \vec{V}_e + \vec{V}_r,$$

де $V_e = \omega_e \cdot MO_1$, $\omega_e = d\varphi_e/dt = 0{,}5\pi\cos(\pi t/8)$ с$^{-1}$, $V_r = dS/dt = \pi t/4$.

При $t = t_1 = 2$ с: $\omega_e = 1{,}11$ с$^{-1}$, $MO_1 = R = 1$ м, $V_e = 1{,}11$ м/с, $V_r = 1{,}57$ м/с; вектор $\vec{V}_e$ перпендикулярний до MO_1 і напрямлений в бік обертання квадрата; вектор $\vec{V}_r$ напрямлений по дотичній до траєкторії руху точки в бік її руху (рис. 4.2, б). Таким чином $\vec{V}_e \perp \vec{V}_r$ і маємо:

$$V_M = \sqrt{V_e^2 + V_r^2} = 1{,}92 \text{ м/с}.$$

За теоремою (4.4) визначимо абсолютне прискорення точки M, бо переносний рух є обертальним; врахуємо також, що відносний рух точки M є криволінійний:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_e^{\,n} + \vec{a}_e^{\,\tau} + \vec{a}_c. \quad (4.9)$$

Обчислимо складові відносного прискорення за формулами (1.16) та (1.17):

$$a_r^n = V_r^2/R = 2{,}46 \text{ м/с}^2, \; a_r^\tau = dV_r/dt = 0{,}25\pi.$$

Вектор $\vec{a}_r^{\,n}$ напрямлений від точки *M* до центра кривизни *C* відносного руху по радіусу *MC*, а вектор $\vec{a}_r^{\,\tau}$ напрямлений в той же бік, що і $\vec{V}_r$, бо при $t_1 = 2$ с $V_r > 0$, $a_r > 0$ (рис. 4.2, б).

Обчислимо складові переносного прискорення за формулами (2.6) та (2.7) з врахуванням (2.3):

$$a_e^n = \omega_e^2 \cdot O_1M, \; a_e^\tau = \varepsilon_e \cdot O_1M, \; \varepsilon_e = d\omega_e/dt = -0{,}0625\pi^2\sin(\pi t/8).$$

При $t = t_1 = 2$ с маємо: $O_1M = R = 1$ м, $\varepsilon_e = -0{,}44$ с$^{-2}$, $\omega_e = 1{,}11$ с$^{-1}$, $a_e^n = 1{,}23$ м/с^2, $a_e^\tau = -0{,}44$ м/с^2.

Вектор $\vec{a}_e^n$ напрямлений від точки M до центра кривизни переносного руху O_1 по радіусу MO_1; вектор $\vec{a}_e^\tau$ напрямлений протилежно до $\vec{V}_e$ (рис. 4.2, б), бо при $t_1 = 2$ с $V_e > 0$, $a_e^\tau < 0$.

Визначимо прискорення Коріоліса за формулою (4.6) при $t = t_1 = 2$ с:

$$a_c = 2\omega_e V_r \sin(\vec{\omega}_e \hat{,} \vec{V}_r) = 2 \cdot 1{,}11 \cdot 1{,}57 \sin 90° = 3{,}49 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Зауважимо, що вектор $\vec{\omega}_e$ напрямлений вздовж осі обертання O_1X_1 на нас (див. п. 2.2); вектор $\vec{a}_c$ напрямлений за правилом Жуковського (п. 4.4).

Модуль абсолютного прискорення визначаємо з (4.8), попередньо спроектувавши рівність (4.14) на осі координат *X*, *Y*, *Z* (рис. 4.2, б):

$$a_{MX} = 0; \qquad a_{MY} = -a_e^n + a_r^\tau = -0{,}44; \qquad a_{MZ} = a_r^n - a_e^\tau + a_c = 5{,}51;$$

остаточно маємо:

$$a_M = \sqrt{(-0{,}44)^2 + 5{,}51^2} = 5{,}53 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Зауважимо, що під час підрахунків взято $a_e^\tau = 0{,}44$ м/с^2, бо знак "–" врахований на рис. 4.2, б.

Відповідь: $V_M = 1{,}92$ м/с, $a_M = 5{,}53$ м/с^2.

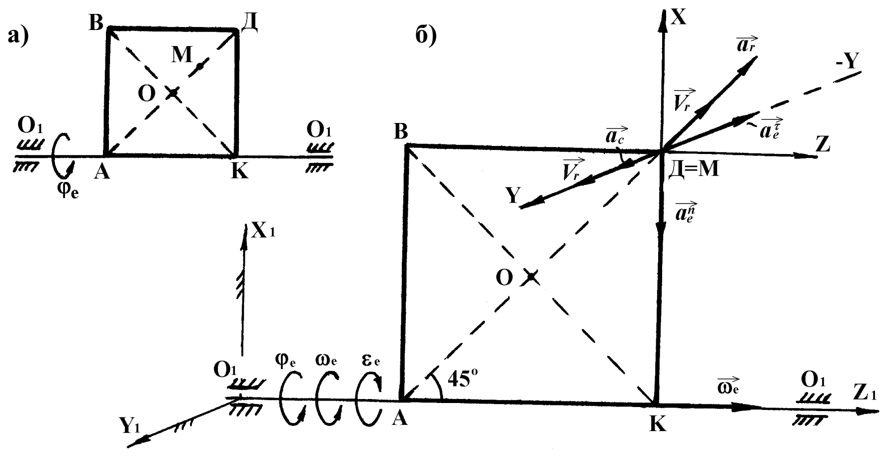


Рис. 4.3

ПРИКЛАД 4.2. Квадрат АВДК (рис. 4.3) обертається навколо осі $O_1 - O_1$ у відповідності з законом $\boldsymbol{\varphi = 3\,t - t^2}$ рад; одночасно по його діагоналі рухається точка М відповідно до рівняння OM = $S_r = 0{,}25\sqrt{2}\,(t^2 + t)$ м. Визначити абсолютні швидкість та прискорення точки М в момент часу $t = t_1 = 1$ с, якщо $AB = 1$ м.

Розв'язання. Точка М виконує складний рух: переносний обертальний разом з квадратом АВДК $(\varphi_e \neq 0)$ навколо осі $O_1 - O_1$ і відносний прямолінійний вздовж діагоналі $AД$ $(a_r \equiv a_r^\tau)$. Визначимо положення точки М у відносному русі в момент часу t_1=1с:

$$OM = S_r = 0{,}25\sqrt{2}\,(t_1^2 + t_1) = \sqrt{2}/2 \text{ (м).}$$

Враховуючи, що АВДК – квадрат, приходимо до висновку, що точка М при t_1=1с збігається з точкою Д: $AД = \sqrt{AB^2 + BД^2} = \sqrt{2}$, а $AД = 2\,ДO$.

Визначимо а б с о л ю т н у ш в и д к і с т ь точки за формулою (4.1)

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r,$$

де $V_r = dS/dt = 0{,}25\sqrt{2}\,(2t + 1)$, $V_e = \omega_e\,MK$ = (3t-2) MK, $\omega_e = d\varphi_e\,/\,dt = 3 - 2t$. При $t = t_1 = 1$ с V_r = 1,05 м/с, ω_e = 1с$^{-1}$, V_e = 1м/с. Вектор $\vec{V}_r$ напрямлений в бік збільшення S_r, а вектор $\vec{V}_e \perp MK$ і напрямлений в бік обертання (рис. 4.3,б);

таким чином $\vec{V}_e \perp \vec{V}_r$ і в (4.2) $\cos(\vec{V}_e \,\hat{,}\, \vec{V}_r) = 0$; маємо:

$$V = \sqrt{V_e^2 + V_r^2} = \sqrt{1^2 + 1{,}05^2} = 1{,}45 \text{ (м/с).}$$

Визначимо а б с о л ю т н е п р и с к о р е н н я точки М. При переносному обертальному та відносному прямолінійному рухах користуємось теоремою (4.4)

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e^{\,n} + \vec{a}_e^{\,\tau} + \vec{a}_C\,, \tag{4.10}$$

де $a_e^n = \omega_e^2 \cdot MK = 1^2 \cdot 1 = 1$ (м/с^2);

$a_e^\tau = \varepsilon_e \cdot MK = (d\varphi_e/dt)\cdot MK = -2 \cdot 1 = -2$ (м/с^2);

$a_r = a_r^\tau = dV_r/dt = 0{,}25\sqrt{2} \cdot d\,(2t+1)/dt = 0{,}7$ (м/с^2);

$a_c = 2\omega_e V_r \sin(\vec{\omega}_e \,\hat{,}\, \vec{V}_r) = 2 \cdot 1 \cdot 1{,}05 \sin 45° = 1{,}5$ (м/с^2).

Зауважимо, що всі розрахунки для складових в (4.4) зроблено для $t = t_1$=1с. Ми отримали, що V_r>0 та a_r>0 при t_1 = 1с, а це означає, що вектор $\overrightarrow{a_r}$

напрямлений в той же бік, що і вектор $\vec{V}_r$ (рис.4.3,б); в той же момент часу V_e>0 і $a_e^\tau < 0$, тому вектор $\vec{a}_e^\tau$ напрямлений протилежно до $\overrightarrow{V_e}$,тобто перпендикулярно до площини рисунка від нас. При обчисленні $\vec{a}_C$ враховано, що $\vec{\omega}_e$ напрямлений вздовж осі обертання Z_1 (рис.4.3,б); таким чином між векторами $\vec{\omega}_e$ та $\vec{V}_r$ кут складає 45°. Вектор $\vec{a}_C$ напрямлений на рис. 4.3,б за правилом Жуковського (див. рис. 4.1).

Спроектуємо рівність (4.10) на осі рухомих координат X, Y, Z і проведемо обчислення для моменту часу t_1=1с

$$a_x = -a_e^n + a_r \sin 45° = -1 + 0{,}7 \sin 45° = -0{,}5\,;$$

$$a_y = a_c - a_e^\tau = 1{,}5 - 2 = -0{,}5\,;$$

$$a_z = a_r \cos 45° = 0{,}7 \cos 45° = 0{,}5$$

і за формулою (4.3) маємо

$$a_M = \sqrt{(-0{,}5)^2 + (-0{,}5)^2 + 0{,}5^2} = 0{,}87 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Відповідь: точка М (рис. 4.3) в момент часу $t = t_1 = 1$ с збігається з точкою Д квадрата АВДК і має в цей момент швидкість V_M = 1,45 м/с та прискорення a_M = 0,87 м/с^2.

ЛІТЕРАТУРА

1. Цасюк В.В. Теоретична механіка: Навчальний посібник. - Київ: Центр навчальної літератури, 2004.- 402 с.
2. Павловський М.А. Теоретична механіка. – К.: Техніка, 2002.- 512с.
3. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики :учеб. для вузов – 12-е изд. – М.: Высш. шк., 1998. – 416 с.
4. Яблонский А. А., Никифорова В. М. Курс теоретической механики. Ч. І. Статика. Кинематика. Учеб. для втузов. – 5-е изд. испр. – М.: Высш. шк., 1997. – 368 с.
5. Хижняков О. В. Основи теоретичної механіки в прикладах і задачах. Кінематика. Статика: Навч. посібник.- Рівне : НУВГП, 2004. – 284 с.: іл.
6. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: учебн. пособие для техн. вузов / А. А. Яблонский, С. А. Вольфсон и др. – 4-е изд. перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1985.-367 с.
7. Мещерский И. В. Сборник задач по теоретической механике: Учеб. пособие. -36-е изд., исправл. / Под ред. Н. В. Бутенина и др.- М.: Наука, 1986. - 448 с.